CONCOURS 1987 **OPTION M**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

INTRODUCTION

$\mathcal{E}$ est un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormal de sens direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. En choisissant O comme pôle et $(O; \vec{i})$ comme axe polaire on notera ρ et θ les coordonnées polaires d'un point de $\mathcal{E}$. Lorsque le temps intervient, il s'agit d'un réel positif ou nul. La vitesse algébrique d'un point mobile est la mesure algébrique de son vecteur vitesse sur la tangente orientée.

Les deux parties du problème sont totalement indépendantes

I

On donne deux points F et F′ de $\mathcal{E}$ de coordonnées cartésiennes respectives $(l, 0)$ et $(-l, 0)$ (où l est un réel strictement positif). c désigne un nombre réel strictement positif, on note (Γ_c) l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\|\overrightarrow{MF}\| . \|\overrightarrow{MF'}\| = 2lc$.

1. Donner une équation cartésienne de (Γ_c).

2. ρ et θ désignent les coordonnées polaires d'un point M de (Γ_c).

   a. Dans chacun des cas : $l < 2c$; $l = 2c$; $2c < l$, exprimer ρ^2 en fonction de θ. Montrer que si $l \leqslant 2c$ on peut représenter (Γ_c) par une équation polaire de la forme $\rho = f(\theta)$. Lorsque $2c < l$, prouver que (Γ_c) est réunion de deux courbes (Γ'_c) et (Γ''_c), chacune d'elles étant représentée par une équation polaire $\rho = f(\theta)$.

   b. Utiliser les équations polaires précédentes pour déterminer les variations de ρ en fonction de θ.

   c. Déterminer les points de (Γ_c) où la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{i}$ et ceux où la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{j}$. (On sera amené à faire une discussion selon que $l \leqslant c$, $c < l < 2c$, $l = 2c$, $2c < l$.)

3. Montrer que chacune des courbes (Γ_c) est réunion d'au plus deux arcs de classe C^1. On oriente chacun de ces arcs dans le sens des θ croissants.

   a. Calculer la courbure en un point de (Γ_c) de coordonnées polaires ρ et θ en fonction de ρ, l, c.

   b. Déterminer les cas dans lesquels (Γ_c) présente des points d'inflexion.

4. Représenter graphiquement les différentes formes de courbes (Γ_c).

II

Soit (Γ) l'arc paramétré du plan $\mathcal{E}$ d'équation polaire :

$$\rho = \sqrt{\cos 2\theta} \left(-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \right).$$

1. Déterminer les tangentes à (Γ) aux points de paramètres $\theta = -\frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

   En choisissant 10 cm comme unité sur les axes, représenter (Γ).

2. On oriente (Γ) dans le sens des θ croissants et on désigne par s l'abscisse curviligne sur (Γ) telle que le point A de coordonnées polaires $\theta = 0$, $\rho = 1$ ait une abscisse curviligne nulle. On utilise comme nouveau paramètre $u = \operatorname{tg} \theta$, $u \in [-1, +1]$. Soit f la fonction réelle d'une variable réelle définie sur $[-1, +1]$ qui à u paramètre du point M associe s abscisse curviligne de M.

   a. Exprimer $f(u)$ sous la forme d'une intégrale sur le segment $[0, u]$. Montrer que $\alpha = f(-1)$ et $\beta = f(1)$ sont des intégrales convergentes.

Tournez la page S. V. P.

page 156 1987 ECOLE SUPERIEURE d'INGENIEURS de MARSEILLE Math 2

b. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et notée sn. On définit alors deux autres fonctions réelles sur $[\alpha, \beta]$ par :

$$cn(s) = \sqrt{1 - sn^2(s)} \text{ et } dn(s) = \sqrt{1 + sn^2(s)}.$$

3. *a.* Montrer que sn, cn et dn sont de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ et exprimer leurs dérivées à l'aide des fonctions sn, cn et dn.

b. Prouver que la fonction réelle φ de deux variables réelles, définie sur $\Delta = [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \setminus \{(s, s),\ s \in [\alpha, \beta]\}$ par :

$$\varphi(s_1, s_2) = \frac{dn(s_1)\, cn(s_2) - cn(s_1)\, dn(s_2)}{sn(s_1) - sn(s_2)},$$

est de classe C^1 sur Δ. Comparer $\dfrac{\partial \varphi}{\partial s_1}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial s_2}$.

Soit alors k la fonction réelle de deux variables réelles définie par $k(v, w) = \varphi\left(\dfrac{v + w}{2}, \dfrac{v - w}{2}\right)$. Déterminer l'ensemble de définition de k. Montrer que k est de classe C^1 sur son ensemble de définition et calculer $\partial k / \partial w$.

c. Déduire de ce qui précède qu'il existe une fonction réelle, ψ, d'une variable réelle, continue sur $[2\alpha, 2\beta]$ telle que :

$$\forall (s_1, s_2) \in \Delta,\quad \varphi(s_1, s_2) = \psi(s_1 + s_2).$$

4. Dans les questions 4. et 5., M_1 et M_2 sont deux points mobiles sur (Γ) animés de mouvements de classe C^2. On note u_1 et u_2 les paramètres de M_1 et M_2 et on suppose : $(u_1, u_2) \in]-1, 1[\times]-1, 1[$; $u_1 \neq u_2$ et $u_1 \neq -u_2$. On désigne par s_1 et s_2 les abscisses curvilignes des points M_1 et M_2. Enfin on suppose qu'à chaque instant M_1 et M_2 ont des vitesses algébriques opposées.

a. Montrer qu'il existe un réel non nul a tel qu'à chaque instant :

$$f(u_1) + f(u_2) = a.$$

b. En utilisant II.3.*c* déduire de ce qui précède qu'il existe une constante λ telle que u_1 et u_2 vérifient l'équation :

$$(\mathcal{F}_\lambda) \qquad 4\lambda^2 u_1^2 u_2^2 + \lambda^4 (u_2 - u_1)^2 + 4(u_1 + u_2)^2 - 4\lambda^2 = 0.$$

c. En posant $\sigma = u_1 + u_2$ et $\pi = u_1 . u_2$ déduire de $(\mathcal{F}_\lambda)$ une nouvelle condition sur σ et π.

5. Soit alors $(\mathcal{C})$ le cercle passant par O, M_1 et M_2 de centre Ω.

a. Si x et y désignent les coordonnées cartésiennes de Ω, écrire une équation polaire de ce cercle.

b. Si u_1 et u_2 vérifient $(\mathcal{F}_\lambda)$, montrer que Ω appartient à une courbe (C_λ) dont on donnera une équation cartésienne.

c. On pose $x^2 = \dfrac{X}{T}$ et $y^2 = \dfrac{Y}{T}$ (x et y coordonnées de Ω, $X \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}^*$).

Montrer que, dans l'hypothèse du paragraphe II 5. *b.*, le triplet (X, Y, T) est vecteur isotrope d'une forme quadratique. Décomposer cette forme quadratique en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

d. Démontrer que (C_λ) est réunion de deux coniques. Donner la nature de ces coniques et déterminer leurs foyers.

ECOLE SUPERIEURE d'INGENIEURS de MARSEILLE
Math 2
page 157
1987